

Estimação do índice de cauda em modelos de caudas pesadas: acomodação do viés nos excessos acima de um “threshold” elevado*

Lígia Henriques Rodrigues

Instituto Politécnico de Tomar e C.E.A.U.L.

lhenriques@ipt.pt

11 de Dezembro de 2007

Resumo: Neste trabalho, e num contexto de modelos de cauda pesada pertencentes à classe de Hall, apresentamos uma nova classe de estimadores de máxima verosimilhança do índice de cauda γ . A metodologia usada para a derivação dos estimadores baseia-se na acomodação do viés no modelo Pareto dos excessos acima de um nível aleatório elevado. Analisamos ainda, num pequeno estudo de simulação, via método de Monte Carlo, o comportamento exacto dos estimadores de máxima verosimilhança em amostras de dimensão pequena.

Palavras-chave: Estatística de Extremos, Estimação semi-paramétrica, Modelo Generalizado de Pareto, Estimação de Máxima Verosimilhança, Método de Monte Carlo.

1 Introdução

Os modelos de valores extremos, de cauda pesada, são cada vez mais utilizados em áreas tão diversas como, por exemplo, as telecomunicações, as finanças, os seguros e a bioestatística.

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e identi-

*Investigação parcialmente financiada pela FCT / POCTI / FEDER e pela bolsa de doutoramento SFRH/BD/29010/2006 da Fundação para a Ciência e Tecnologia.

camente distribuídas com função de distribuição (f.d.) comum F e $X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Admitamos que a distribuição de $X_{n:n}$, após normalização adequada, é atraída para a distribuição de Valores Extremos,

$$G_\gamma(x) := \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}), & 1 + \gamma x > 0 \text{ se } \gamma \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)), & x \in \mathbb{R} \text{ se } \gamma = 0 \end{cases},$$

onde o parâmetro de forma da distribuição, γ , é o índice de cauda. Dizemos então que a f.d. F pertence ao domínio de atração para máximos da distribuição G_γ e escrevemos $F \in \mathcal{D}_M(G_\gamma)$. Para os modelos de cauda pesada ($\gamma > 0$) é válida a seguinte equivalência designada de condição de variação regular de primeira ordem,

$$F \in \mathcal{D}_M(G_\gamma) \quad \text{se e só se} \quad 1 - F \in RV_{-1/\gamma} \quad \text{se e só se} \quad U \in RV_\gamma, \quad (1.1)$$

onde $U(t) := F^{*-1}(1 - 1/t) = \inf \{x : F(x) \geq 1 - 1/t\}$, para $t > 1$, representa a função quantil e RV_τ denota a classe de funções de variação regular no infinito com índice de variação regular τ , i.e., a classe de funções positivas mensuráveis $g(\cdot)$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} g(tx)/g(t) = x^\tau, \forall x > 0$.

Admitimos também a validade de uma condição de variação regular de segunda ordem que mede a velocidade de convergência de $\ln U(tx) - \ln U(t)$ para $\gamma \ln x$, em (1.1), através do parâmetro de forma de segunda ordem ρ (≤ 0), e onde $|A(t)| \in RV_\rho$ (Geluk e de Haan, 1987),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln U(tx) - \ln U(t) - \gamma \ln x}{A(t)} = \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad \forall x > 0. \quad (1.2)$$

Neste trabalho vamos supor que F é um modelo pertencente à classe de Hall (Hall, 1982; Hall e Welsh, 1985), com

$$A(t) = \gamma \beta t^\rho, \quad \rho < 0, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

onde β e ρ são os parâmetros de escala e de forma de segunda ordem, respectivamente.

Como é usual em estimação semi-paramétrica de acontecimentos raros, a inferência é realizada com base nas k estatísticas ordinais (e.o.'s) de topo, de forma

a garantir a consistência destes estimadores. Assim, consideramos sucessões intermédias de inteiros positivos, $k = k_n$ entre 1 e n , tais que:

$$k = k_n \rightarrow \infty, \quad k_n = o(n), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Os excessos acima de um nível aleatório elevado $X_{n-k:n}$ são representados por,

$$V_i := X_{n-i+1:n} - X_{n-k:n}, \quad 1 \leq i \leq k < n, \quad (1.4)$$

onde $X_{i:n}$ denota a i -ésima e.o. ascendente, $1 \leq i \leq n$, associada à amostra aleatória (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Com base na definição da função quantil, U , e no facto de $F^{\leftarrow}(R)$ ter distribuição $F(\cdot)$ quando R é uma v.a. uniforme em $(0, 1)$, temos que $X_{i:n} = U(Y_{i:n})$ onde Y é uma v.a. com distribuição Pareto (i.e., $F_Y(y) = 1 - y^{-1}$, $y \geq 1$). Como para $j > i$, $Y_{j:n}/Y_{i:n} \stackrel{d}{=} Y_{j-i:n-i}$, $\ln Y_{i:n} \stackrel{d}{=} E_{i:n}$ onde E denota uma v.a. com distribuição exponencial unitária e $Y_{n-k:n} \sim n/k$, podemos escrever, sob a validade da condição de variação regular de primeira ordem em (1.1),

$$V_i \stackrel{d}{=} X_{n-k:n} \left\{ \frac{U(Y_{n-i+1:n})}{U(Y_{n-k:n})} - 1 \right\} \stackrel{d}{=} U(n/k) \{Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1\} (1 + o_p(1)).$$

Considerando $\alpha = 1/U(n/k)$, e sucessões intermédias k ,

$$V_i = X_{n-i+1:n} - X_{n-k:n} \approx \frac{Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1}{\alpha}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

i.e., os excessos V_i são, aproximadamente, as k e.o.'s de uma amostra de dimensão k de um modelo Generalizado de Pareto (GP), com função de distribuição

$$GP(x; \gamma, \alpha) = 1 - (1 + \alpha x)^{-1/\gamma}, \quad x > 0 \quad (\gamma > 0), \quad (1.5)$$

onde os parâmetros γ e α são estimados via *Máxima Verosimilhança* (ML, do inglês “Maximum Likelihood”), tendo-se a seguinte igualdade em distribuição, para $1 \leq i \leq k$,

$$\alpha V_i \stackrel{d}{=} (Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1)(1 + o_p(1)). \quad (1.6)$$

A metodologia POT (do inglês “Peaks Over Threshold”) foi introduzida em Smith (1987), onde é usada a parametrização (γ, δ) com $\delta = \gamma/\alpha$. A parametrização da Generalizada de Pareto em (1.5) foi sugerida por Davison (1984).

O estimador de máxima verosimilhança de γ , $\hat{\gamma}_n^{ML}$, designado de estimador PORT-ML, é uma função explícita do estimador de máxima verosimilhança de α , $\hat{\alpha}^{ML}$, e da amostra dos excessos, V_i . Assim,

$$\hat{\gamma}_n^{ML}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(1 + \hat{\alpha}^{ML} V_i). \quad (1.7)$$

A metodologia associada aos excessos acima de um nível aleatório foi denominada de metodologia PORT (do inglês “Peaks Over Random Threshold”) em Araújo Santos, Fraga Alves e Gomes (2006).

Note-se que, uma escolha óbvia para a estimação de α é $1/X_{n-k:n}$. Então $1 + \hat{\alpha} V_i = X_{n-i+1:n}/X_{n-k:n}$, e o estimador em (1.7) é o estimador de Hill (Hill, 1975),

$$\gamma_n^H(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \{\ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n}\}. \quad (1.8)$$

Vamos em seguida explicitar o factor $(1 + o_p(1))$ em (1.6). Sob a validade da condição de variação regular de segunda ordem em (1.2), existem constantes γ e α tais que, para $1 \leq i \leq k$,

$$\alpha V_i \stackrel{d}{=} Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1 + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^\gamma \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)). \quad (1.9)$$

A equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha V_i &= Y_{k-i+1:k}^\gamma \left(1 + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right) - 1 \\ &= e^{\gamma \ln Y_{k-i+1:k} + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))} - 1 \\ &= e^{\gamma \ln Y_{k-i+1:k} \left(1 + \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}} (1 + o_p(1)) \right)} - 1 \\ &= Y_{k-i+1:k}^\gamma \left(1 + \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}} (1 + o_p(1)) \right) - 1 \\ &\approx Y_{k-i+1:k}^\gamma e^{\frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}}} - 1. \end{aligned}$$

Com base nas equações (1.6) e (1.9) obtemos que,

$$\alpha V_i - \left(Y_{k-i+1:k}^{\gamma e} \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho} - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}} - 1 \right) = o_p \left(\alpha V_i - (Y_{k-i+1:k}^{\gamma} - 1) \right).$$

Como

$$\frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho} - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}} \sim -\frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\rho \ln(i/k)} =: \psi_i \equiv \psi(i/k) \equiv \psi_{ik}(\rho) [\psi_k \equiv 1], \quad (1.10)$$

e ψ_i é uma função limitada, esperamos que o estimador associado a um modelo GP com parâmetro de forma igual a γ tenha um viés maior do que o estimador obtido considerando os excessos V_i provenientes de um modelo GP com parâmetro de forma γ_i , dado por

$$\gamma_i = \gamma e^{A(n/k)\psi_i/\gamma} = \gamma e^{\beta \left(\frac{n}{k}\right)^{\rho} \psi_i}, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1.11)$$

O modelo GP com função de distribuição $GP(x; \gamma_i, \alpha)$ em (1.5) e com parâmetro de forma γ_i em (1.11), para todo $1 \leq i \leq k$, é designado de modelo de Pareto modificado (MP, do inglês “Modified Pareto”). O estimador de máxima verosimilhança de γ obtido com base nos excessos associados a este modelo é designado de estimador PORT-MP e dado por:

$$\widehat{\gamma}_n^{MP}(k) \equiv \widehat{\gamma}_{n, \widehat{\beta}, \widehat{\rho}}^{MP}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\widehat{\beta} (n/k)^{\widehat{\rho}} \widehat{\psi}_i} \ln(1 + \widehat{\alpha}^{MP} V_i), \quad \widehat{\psi}_i = -\frac{(i/k)^{-\widehat{\rho}} - 1}{\widehat{\rho} \ln(i/k)}, \quad (1.12)$$

onde $\widehat{\alpha}^{MP}$ é o estimador de máxima verosimilhança de α baseado nos excessos associados à distribuição de Pareto modificada, sendo $\widehat{\rho}$ e $\widehat{\beta}$ dois estimadores adequados dos parâmetros de segunda ordem ρ e β , respectivamente.

Se escolhermos, novamente, um estimador $\widehat{\alpha} = 1/X_{n-k:n}$ obtemos o estimador dos log-excessos ponderados ou o estimador de Hill Ponderado, designado de estimador WH (do inglês “Weighted Hill”),

$$\widehat{\gamma}^{WH}(k) \equiv \widehat{\gamma}_{\widehat{\beta}, \widehat{\rho}}^{WH}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\widehat{\beta} (n/k)^{\widehat{\rho}} \widehat{\psi}_i} \ln \left(\frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \right). \quad (1.13)$$

Este estimador foi estudado por Gomes *et al.* (2004) e é um estimador de viés reduzido de segunda ordem, com variância assintótica igual a γ^2 , a variância assintótica do estimador de Hill, face a condições fracas impostas ao estimador do parâmetro de segunda ordem ρ .

Neste trabalho começamos por apresentar, na secção 2, os estimadores de máxima verosimilhança com o viés acomodado nos excessos associados à distribuição de Pareto modificada, denotados por $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$. A estimação dos parâmetros de forma e de escala de segunda ordem, ρ e β , respectivamente, é apresentada na secção 3. Na secção 4 analisamos o comportamento assintótico dos estimadores $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$ e finalizamos este trabalho apresentando, na secção 5, um breve estudo comparativo do comportamento exacto dos estimadores em análise.

2 Estimadores de Máxima Verosimilhança com o viés acomodado nos excessos associados à distribuição de Pareto modificada

Como referimos anteriormente, o procedimento inferencial é realizado admitindo a existência de um parâmetro α para o qual os excessos $V_i = X_{n-i+1:n} - X_{n-k:n}$ são provenientes de um modelo GP com função de distribuição $GP(x; \gamma_i, \alpha)$ em (1.5) e com parâmetro de forma γ_i definido em (1.11), para todo $1 \leq i \leq k$.

A função de verosimilhança de $\underline{V} = (V_i, 1 \leq i \leq k)$ é, então, proporcional a

$$L(\alpha, \beta, \gamma; \underline{V}) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^k \prod_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} (1 + \alpha V_i)^{-\frac{1}{\gamma} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} - 1},$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \ln L(\gamma, \alpha; V_i, 1 \leq i \leq k) &= k \ln \alpha - k \ln \gamma - \beta \left(\frac{n}{k}\right)^\rho \sum_{i=1}^k \psi_i - \sum_{i=1}^k \ln(1 + \alpha V_i) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \ln(1 + \alpha V_i). \end{aligned}$$

A maximização da equação anterior em ordem a γ permite obter o estimador de máxima verosimilhança de γ , $\widehat{\gamma}_n^{MP}$, baseado nos excessos associados à distribuição de Pareto modificada,

$$\widehat{\gamma}_n^{MP}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\widehat{\beta}(n/k)^{\widehat{\rho}} \widehat{\psi}_i} \ln(1 + \widehat{\alpha}^{MP} V_i), \quad (2.1)$$

onde $\widehat{\alpha}^{MP}$ é o estimador de máxima verosimilhança de α baseado nos excessos associados à distribuição de Pareto modificada, sendo $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\rho}$ dois estimadores adequados dos parâmetros de segunda ordem (secção 3), e $\widehat{\psi}_i$ o estimador da função ψ_i dada em (1.10).

Considerem-se as seguintes notações:

$$A = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(1 + \alpha V_i), \quad A_{(j)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \ln(1 + \alpha V_i),$$

$$B = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\alpha V_i}{1 + \alpha V_i}, \quad B_{(j)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \frac{\alpha V_i}{1 + \alpha V_i},$$

$$C = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\alpha V_i}{(1 + \alpha V_i)^2}, \quad C_{(j)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \frac{\alpha V_i}{(1 + \alpha V_i)^2},$$

e as notações óbvias para \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} , $\widehat{A}_{(j)}$, $\widehat{B}_{(j)}$ e $\widehat{C}_{(j)}$, $j \geq 1$. Desta forma, e com $j \geq 1$, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= \frac{B}{\alpha}, & \frac{\partial B}{\partial \alpha} &= \frac{C}{\alpha}, & \frac{\partial A_{(j)}}{\partial \alpha} &= \frac{B_{(j)}}{\alpha}, & \frac{\partial B_{(j)}}{\partial \alpha} &= \frac{C_{(j)}}{\alpha}, \\ \frac{\partial A}{\partial \beta} &= \frac{\partial B}{\partial \beta} = 0, & \frac{\partial A_{(j)}}{\partial \beta} &= -\frac{A(n/k) A_{(j+1)}}{\beta \gamma}, & \frac{\partial B_{(j)}}{\partial \beta} &= -\frac{A(n/k) B_{(j+1)}}{\beta \gamma}. \end{aligned}$$

O estimador de α baseado nos excessos associados à distribuição de Pareto modificada, $\widehat{\alpha}^{MP}$, é a única solução da equação,

$$\widehat{B} + \frac{\widehat{B}_{(1)}}{\widehat{A}_{(1)}} - 1 \equiv 0. \quad (2.2)$$

Nas secções 3 e 4 analisamos a estimação do vector de parâmetros (α, β, ρ) de forma a obtermos a distribuição assintótica de $\widehat{\gamma}_n^{MP}$.

3 Estimação dos parâmetros de segunda ordem

Neste trabalho optámos pela estimação externa dos parâmetros de segunda ordem num nível k_1 adequado. Para mais detalhes sobre as vantagens e desvantagens de uma estimação externa dos parâmetros de segunda ordem versus a estimação interna no mesmo nível k em que é feita a estimação do índice de cauda pode ver-se o trabalho de Gomes e Martins (2002).

Deste modo, o estimador dado em (2.1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\hat{\gamma}_n^{MP}(k) = \hat{A}_{(1)} = A_{(1)} + B_{(1)} \frac{\hat{\alpha}^{MP} - \alpha}{\alpha} (1 + o_p(1)), \quad (3.1)$$

e, como $\partial (B + B_{(1)}/A_{(1)} - 1) / \partial \alpha = (C + C_{(1)}/A_{(1)} - (B_{(1)}/A_{(1)})^2) / \alpha$, o estimador $\hat{\alpha}^{MP}(k)$, em (2.2), é tal que

$$\hat{B} + \frac{\hat{B}_{(1)}}{\hat{A}_{(1)}} - 1 \equiv 0 = B + \frac{B_{(1)}}{A_{(1)}} - 1 + \frac{\hat{\alpha}^{MP} - \alpha}{\alpha} \left(C + \frac{C_{(1)}}{A_{(1)}} - \left(\frac{B_{(1)}}{A_{(1)}} \right)^2 \right) (1 + o_p(1)),$$

i.e.,

$$\frac{\hat{\alpha}^{MP} - \alpha}{\alpha} = \frac{1 - B - B_{(1)}/A_{(1)}}{C + C_{(1)}/A_{(1)} - (B_{(1)}/A_{(1)})^2} (1 + o_p(1)). \quad (3.2)$$

À semelhança de Gomes e Pestana (2007) apresentamos de seguida um algoritmo heurístico para a estimação dos parâmetros de segunda ordem ρ e β . Para a estimação do parâmetro de forma ρ consideramos a metodologia apresentada por Fraga Alves *et al.* (2003), enquanto que na estimação do parâmetro β consideramos a abordagem seguida por Gomes e Martins (2002).

1. Dada uma amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) traçam-se as trajectórias amostrais de $\hat{\rho}(k; \tau)$ para alguns valores de $\tau \in \mathcal{T}$, onde $\mathcal{T} = \{0, 1\}$, por exemplo, com

$$\hat{\rho}_\tau(k) \equiv \hat{\rho}(k; \tau) := - \left| \frac{3(T_n^{(\tau)}(k) - 1)}{T_n^{(\tau)}(k) - 3} \right|, \quad (3.3)$$

onde $T_n^{(\tau)}(k)$ é a estatística,

$$T_n^{(\tau)}(k) := \begin{cases} \frac{\ln(M_n^{(1)}(k)) - \frac{1}{2} \ln(M_n^{(2)}(k)/2)}{\frac{1}{2} \ln(M_n^{(2)}(k)/2) - \frac{1}{3} \ln(M_n^{(3)}(k)/6)}, & \text{se } \tau = 0 \\ \frac{(M_n^{(1)}(k))^\tau - (M_n^{(2)}(k)/2)^{\tau/2}}{(M_n^{(2)}(k)/2)^{\tau/2} - (M_n^{(3)}(k)/6)^{\tau/3}}, & \text{se } \tau > 0 \end{cases},$$

$$M_n^{(j)}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \right]^j, \quad j \geq 1 \quad [M_n^{(1)} = \hat{\gamma}_n^H \text{ em (1.8)}];$$

2. Calcula-se a mediana de $\hat{\rho}(k; \tau)$ para valores de $k \in ([n^{0.995}], [n^{0.999}])$ denotada por χ_τ e determina-se o valor do parâmetro de controlo τ^* através do seguinte critério de estabilidade:

$$\tau^* := \arg \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_k (\hat{\rho}(k; \tau) - \chi_\tau)^2; \quad (3.4)$$

3. Considera-se $\epsilon \sim 0^+$,

$$k_1 := [n^{1-\epsilon}] + 1, \quad (3.5)$$

e calcula-se a estimativa $\hat{\rho}_{\tau^*} = \hat{\rho}(k_1; \tau^*)$, com $\hat{\rho}(k; \tau)$, τ^* e k_1 dados em (3.3), (3.4) e (3.5), respectivamente;

4. Calcula-se $\hat{\beta}_{\tau^*} := \hat{\beta}(k_1; \hat{\rho}_{\tau^*})$, com τ^* e k_1 dados em (3.4) e (3.5), respectivamente e $\hat{\beta}(k; \hat{\rho})$ dado por,

$$\hat{\beta}(k; \hat{\rho}) := \frac{\binom{k}{n}^{\hat{\rho}} \left[\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{-\hat{\rho}} \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i \right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{-\hat{\rho}} U_i \right) \right]}{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{-\hat{\rho}} \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{-\hat{\rho}} U_i \right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{-2\hat{\rho}} U_i \right)}, \quad (3.6)$$

onde $U_i := i(\ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-i:n})$, $1 \leq i \leq k < n$, são os espaçamentos das log-observações devidamente escalados.

Nota 3.1. O parâmetro de controlo τ^* resultante da aplicação de (3.4) é tal que, com elevada probabilidade, $\tau^* = 0$ quando $\rho \geq -1$ e $\tau^* = 1$ quando $\rho < -1$.

Os estimadores apresentados em (3.3), calculados no nível k_1 em (3.5), são genericamente denotados de $\hat{\rho}$ e utilizaremos a notação $\hat{\beta}$ para denotar $\hat{\beta}(k_1; \hat{\rho}(k_1; \tau))$ para qualquer valor de τ .

4 Propriedades assintóticas

Nesta secção começamos por analisar o comportamento assintótico das v.a.'s em estudo, o qual será posteriormente utilizado na determinação das distribuições assintóticas de $\hat{\gamma}_n^{MP}$, supondo inicialmente que todos os parâmetros são conhecidos à excepção do índice de cauda γ , e admitindo, em seguida, que procedemos à estimação adequada do vector de parâmetros (α, β, ρ) .

Seja $\{E_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com distribuição exponencial unitária e $E_{j:k}$ a j -ésima ($1 \leq j \leq k$) e.o. de topo proveniente de uma amostra de dimensão k do modelo exponencial unitário. Considerem-se as seguintes notações:

$$P_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^j E_{k-i+1:k}, (j \geq 0), \quad (4.1)$$

$$Q_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho}, (j \geq 1), \quad (4.2)$$

$$R_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^j (1 - e^{-\gamma E_{k-i+1:k}}), (j \geq 0), \quad (4.3)$$

$$Z_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^j Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho}, (j \geq 0), \quad (4.4)$$

$$a_j := \frac{(-1)^{j-1}}{\rho^j} \int_0^1 \frac{(x^{-\rho} - 1)^j}{\ln^{j-1} x} dx, (j \geq 1), \quad (4.5)$$

$$b_{j1} := \frac{1}{|\rho|^j} \int_0^1 \frac{(x^{-\rho} - 1)^j (1 - x^\gamma)}{\ln^j x} dx, (j \geq 0), \quad (4.6)$$

$$b_{j2} := -\frac{1}{|\rho|^{j+1}} \int_0^1 \frac{x^\gamma (x^{-\rho} - 1)^{j+1}}{\ln^j x} dx, (j \geq 0), \quad (4.7)$$

onde $\psi_i := -((i/k)^{-\rho} - 1)/(\rho \ln(i/k))$ (definido em (1.10)) e $P_k^{(j)}$, $Q_k^{(j)}$, $R_k^{(j)}$ e

$Z_k^{(j)}$ são assintoticamente normais.

Começamos por apresentar o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *O comportamento de primeira ordem das variáveis aleatórias $P_k^{(j)}$, $Q_k^{(j)}$, $R_k^{(j)}$ e $Z_k^{(j)}$ é dado por*

$$\mathbb{E}(P_k^{(j)}) = \mathbb{E}(Q_k^{(j)}) = a_j \text{ (definido em (4.5))},$$

$$\mathbb{E}(R_k^{(j)}) = b_{j1} \text{ (definido em (4.6))},$$

$$\mathbb{E}(Z_k^{(j)}) = b_{j2} \text{ (definido em (4.7))}.$$

O comportamento de segunda ordem de $P_k^{(0)}$ e $R_k^{(0)}$ é dado por

$$k\text{Var}(P_k^{(0)}) = 1, \tag{4.8}$$

$$k\text{Var}(R_k^{(0)}) = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2(1+2\gamma)}, \tag{4.9}$$

$$k\text{Cov}(P_k^{(0)}, R_k^{(0)}) = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^2}. \tag{4.10}$$

Demonstração. Para $j \geq 0$, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_k^{(j)}] &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^j \mathbb{E}[E_{k-i+1:k}] = \frac{(-1)^j}{\rho^j} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\ln(i/k)} \right)^j \sum_{j=i}^k \frac{1}{j} \right) \\ &= \frac{(-1)^j}{\rho^j} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\ln(i/k)} \right)^j \left(\frac{1}{k} \sum_{j=i}^k \frac{1}{j/k} \right) \right) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^j}{\rho^j} \int_{[0,1]} \left(\frac{x^{-\rho} - 1}{\ln x} \right)^j dx \int_x^1 \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{\rho^j} \int_0^1 \frac{(x^{-\rho} - 1)^j}{\ln^{j-1} x} dx = a_j, \text{ dado em (4.5)}. \end{aligned}$$

Assintoticamente temos que, para $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q_k^{(j)}] &\sim \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} \frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\rho} \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{\rho^j} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{((i/k)^{-\rho} - 1)^j}{\ln^{j-1}(i/k)} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a_j, \text{ dado em (4.5)}, \end{aligned}$$

e para $j \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_k^{(j)}] &\sim \frac{(-1)^j}{\rho^j} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\ln(i/k)} \right)^j (1 - (i/k)^\gamma) \right) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\rho|^j} \int_0^1 \frac{(x^{-\rho} - 1)^j (1 - x^\gamma)}{\ln^j x} = b_{j1}, \text{ dado em (4.6),}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_k^{(j)}] &\sim \frac{(-1)^j}{\rho^{j+1}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{((i/k)^{-\rho} - 1)^{j+1}}{\ln^j(i/k)} (i/k)^\gamma \right) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{|\rho|^{j+1}} \int_0^1 \frac{x^\gamma (x^{-\rho} - 1)^{j+1}}{\ln^j x} = b_{j2}, \text{ dado em (4.7),}\end{aligned}$$

ficando, desta forma, demonstrada a primeira parte da Proposição. No que diz respeito à segunda parte,

$$\begin{aligned}k\mathbb{V}ar(P_k^{(0)}) &= \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{V}ar(E_{k-i+1:k}) = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=i}^k \frac{1}{j^2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=i}^k \frac{1}{(j/k)^2} \right) \right) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2 \int_0^1 \int_x^1 \int_z^1 \frac{1}{y^2} dy dz dx = 1.\end{aligned}$$

Os restantes resultados obtêm-se facilmente: tendo em conta que $\mathbb{E}(e^{-\gamma E}) = \frac{1}{1+\gamma}$ e $\mathbb{E}(e^{-2\gamma E}) = \frac{1}{1+2\gamma}$ obtemos $k\mathbb{V}ar(R_k^{(0)}) = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2(1+2\gamma)}$; e dado que $\mathbb{E}(E - E e^{-\gamma E}) = 1 - \frac{1}{(1+\gamma)^2}$, concluímos que $\mathbb{C}ov(E, 1 - e^{-\gamma E}) = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^2}$, ou seja, $k\mathbb{C}ov(P_k^{(0)}, R_k^{(0)}) = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^2}$. □

Nota 4.1. As constantes a_j , b_{j1} e b_{j2} definidas em (4.5), (4.6) e (4.7), respectivamente, satisfazem para $j = 0$ e $j = 1$ as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}a_0 &= 1; & a_1 &= \frac{1}{1-\rho}; \\ b_{01} &= \frac{\gamma}{1+\gamma}; & b_{11} &= -\frac{1}{\rho} \ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho}; \\ b_{02} &= \frac{1}{(1+\gamma)(1+\gamma-\rho)}; & b_{12} &= -\frac{1}{\rho^2} \ln \frac{(1+\gamma)(1+\gamma-2\rho)}{(1+\gamma-\rho)^2}.\end{aligned}$$

Sabendo que a função ψ_i , em (1.10), é limitada e que k é uma sequência intermédia de inteiros, as v.a.'s $A_{(j)}$, $B_{(j)}$ e $C_{(j)}$, apresentadas na secção 2, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A_{(j)} &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \ln(1 + \alpha V_i) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} \ln(1 + \alpha V_i) - \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^j \ln(1 + \alpha V_i) (1 + o_p(1)) \\
&=: A_j - \frac{A(n/k)}{\gamma} A_{j+1} (1 + o_p(1)). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{(j)} &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \frac{\alpha V_i}{1 + \alpha V_i} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} \frac{\alpha V_i}{1 + \alpha V_i} - \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^j \frac{\alpha V_i}{1 + \alpha V_i} (1 + o_p(1)) \\
&=: B_j - \frac{A(n/k)}{\gamma} B_{j+1} (1 + o_p(1)). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{(j)} &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \frac{\alpha V_i}{(1 + \alpha V_i)^2} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} \frac{\alpha V_i}{(1 + \alpha V_i)^2} - \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^j \frac{\alpha V_i}{(1 + \alpha V_i)^2} \\
&=: C_j - \frac{A(n/k)}{\gamma} C_{j+1} (1 + o_p(1)). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Nota 4.2. A partir das equações (4.11), (4.12) e (4.13) temos que: $A \equiv A_1$, $B \equiv B_1$ e $C \equiv C_1$.

Para as v.a.'s em estudo são válidas as seguintes representações em distribuição:

Teorema 4.1. Admitindo a validade da condição de variação regular de segunda ordem, (1.2), e considerando sucessões intermédias de inteiros $k = k_n$

satisfazendo (1.3) são válidas as seguintes representações em distribuição:

$$A_j \stackrel{d}{=} \gamma a_{j-1} + \gamma \left(P_k^{(j-1)} - a_{j-1} \right) + a_j A(n/k)(1 + o_p(1)), \quad (4.14)$$

$$A_{(j)} \stackrel{d}{=} \gamma a_{j-1} + \gamma \left(P_k^{(j-1)} - a_{j-1} \right) + o_p(A(n/k)), \quad (4.15)$$

$$B_j \stackrel{d}{=} b_{j-1,1} + \left(R_k^{(j-1)} - b_{j-1,1} \right) + b_{j-1,2} A(n/k)(1 + o_p(1)), \quad (4.16)$$

$$B_{(j)} \stackrel{d}{=} b_{j-1,1} + \left(R_k^{(j-1)} - b_{j-1,1} \right) + \left(b_{j-1,2} - \frac{b_{j,1}}{\gamma} \right) A(n/k)(1 + o_p(1)), \quad (4.17)$$

e

$$C \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{(1 + \gamma)(1 + 2\gamma)} + o_p(1). \quad (4.18)$$

Consequentemente

$$1 - B - \frac{B_{(1)}}{A_{(1)}} \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{(1 + \gamma)\sqrt{1 + 2\gamma}} \frac{S_k}{\sqrt{k}} + \frac{\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho}}{\gamma^2} A(n/k)(1 + o_p(1)), \quad (4.19)$$

com S_k assintoticamente normal padrão. Temos ainda que

$$C + \frac{C_{(1)}}{A_{(1)}} - \left(\frac{B_{(1)}}{A_{(1)}} \right)^2 \stackrel{d}{=} \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)^2(1 + 2\gamma)} + o_p(1). \quad (4.20)$$

Demonstração. Começemos por A_j . Dado que

$$\begin{aligned} \alpha V_i &= Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1 + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^\gamma \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)), \\ 1 + \alpha V_i &= Y_{k-i+1:k}^\gamma \left(1 + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right), \end{aligned}$$

e podemos escrever

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} \ln(1 + \alpha V_i) \\ &= \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} E_{k-i+1:k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} A(n/k) (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Aplicando os resultados obtidos na Proposição 4.1 sobre a convergência assintótica de $P_k^{(j)}$ e $Q_k^{(j)}$, obtemos (4.14).

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha V_i}{1 + \alpha V_i} &= \frac{Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1 + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^\gamma \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))}{Y_{k-i+1:k}^\gamma \left(1 + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))\right)} \\
&= \left(1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))\right) \\
&\quad \times \left(1 - A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))\right) \\
&= 1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
B_j &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} \frac{\alpha V_i}{1 + \alpha V_i} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} (1 - e^{-\gamma E_{k-i+1:k}}) \\
&\quad + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i^{j-1} Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} A(n/k) (1 + o_p(1)),
\end{aligned}$$

obtendo-se (4.16). Por último, $\frac{\alpha V_i}{(1 + \alpha V_i)^2}$ pode ser reescrito da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
&\frac{1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))}{Y_{k-i+1:k}^\gamma \left(1 + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))\right)^2} \\
&= \left(Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} (1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma}) + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))\right) \\
&\quad \times \left(1 - 2A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))\right) \\
&= Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} (1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma}) \\
&\quad + A(n/k) \left(2Y_{k-i+1:k}^{-2\gamma} - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma}\right) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)).
\end{aligned}$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} C \equiv C_1 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\alpha V_i}{(1 + \alpha V_i)^2} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\gamma E_i} (1 - e^{-\gamma E_i}) \\ &+ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(2Y_i^{-2\gamma} - Y_i^{-\gamma} \right) \frac{Y_i^\rho - 1}{\rho} A(n/k)(1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

obtendo-se a igualdade em distribuição (4.18), bem como o restante teorema.

De facto,

$$\begin{aligned} 1 - B - \frac{B_{(1)}}{A_{(1)}} &\stackrel{d}{=} \left(\frac{(P_k^{(0)} - a_0)}{1 + \gamma} - \frac{(1 + \gamma)(R_k^{(0)} - b_{01})}{\gamma} \right) \\ &+ \frac{b_{11} - \gamma(1 + \gamma)b_{02}}{\gamma^2} A(n/k)(1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 1 - B - \frac{B_{(1)}}{A_{(1)}} &\stackrel{d}{=} \left(\frac{(P_k^{(0)} - 1)}{1 + \gamma} - \frac{(1 + \gamma)(R_k^{(0)} - \frac{\gamma}{1 + \gamma})}{\gamma} \right) \\ &+ \frac{\ln \frac{(1 + \gamma)(1 - \rho)}{1 + \gamma - \rho} - \frac{\gamma}{1 + \gamma - \rho}}{\gamma^2} A(n/k)(1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

e com base na Proposição 4.1,

$$\text{Var} \left(\frac{P_k^{(0)} - 1}{1 + \gamma} - \frac{(1 + \gamma)(R_k^{(0)} - \frac{\gamma}{1 + \gamma})}{\gamma} \right) = \frac{\gamma^2}{k(1 + \gamma)^2(1 + 2\gamma)}.$$

□

Suponhamos, então, que conhecemos todos os parâmetros à excepção do índice de cauda γ . Neste caso é válido o seguinte teorema,

Teorema 4.2. *Nas condições do Teorema 4.1 obtemos para $\hat{\gamma}_n^{MP}$, em (1.12), a seguinte representação em distribuição*

$$\hat{\gamma}_n^{MP}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} N_k + o_p(A(n/k)), \quad (4.21)$$

onde N_k é assintoticamente normal padrão. Desta forma, a v.a. $\sqrt{k}(\hat{\gamma}_n^{MP}(k) - \gamma)$ segue distribuição assintótica normal padrão quando

$\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow 0$, e quando $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \lambda \neq 0$, finito, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. A partir de (1.9), temos que

$$\ln(1 + \alpha V_i) = \gamma \ln Y_{k-i+1:k} \left(1 + \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}} (1 + o_p(1)) \right),$$

e portanto $\widehat{\gamma}_n^{MP}(k)$ pode ser reescrito da seguinte forma

$$\frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k E_{k-i+1:k} \left(1 + \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho E_{k-i+1:k}} (1 + o_p(1)) \right) \left(1 - \frac{A(n/k)}{\gamma} \psi_i (1 + o(1)) \right).$$

Definindo

$$W_k := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_i E_{k-i+1:k} =: Q_k^{(1)} - P_k^{(1)},$$

com $P_k^{(1)}$ e $Q_k^{(1)}$ dadas em (4.1) e (4.2), respectivamente, obtemos

$$\widehat{\gamma}_n^{MP}(k) = \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k E_i + A(n/k) W_k (1 + o_p(1)).$$

Pela Proposição 4.1 sabemos que $\mathbb{E}[P_k^{(1)}] = \mathbb{E}[Q_k^{(1)}] = a_1$. Logo, a v.a. W_k converge em probabilidade para 0, quando $k \rightarrow \infty$, e, definindo $N_k = \sqrt{k} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i - 1 \right)$, obtemos a representação em distribuição (4.21). \square

Caso os parâmetros de segunda ordem ρ e β sejam estimados de forma adequada, i.e., se $\widehat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n)$ e $\widehat{\beta} - \beta = o_p(1)$, para todo o k utilizado na estimação de $\widehat{\gamma}_n^{MP}(k)$, é válido o seguinte teorema:

Teorema 4.3. *Nas condições do Teorema 4.1 são válidas as seguintes representações em distribuição:*

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\alpha}^{MP}(k) - \alpha}{\alpha} &\stackrel{d}{=} \frac{(1 + \gamma)\sqrt{1 + 2\gamma}}{\gamma\sqrt{k}} S_k \\ &+ \frac{(1 + \gamma)^2(1 + 2\gamma) \left(\ln \frac{(1 + \gamma)(1 - \rho)}{1 + \gamma - \rho} - \frac{\gamma}{1 + \gamma - \rho} \right)}{\gamma^4} A(n/k)(1 + o_p(1)), \end{aligned} \quad (4.22)$$

e desde que $\widehat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n)$ e $\widehat{\beta} - \beta = o_p(1)$,

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_n^{MP}(k) &\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{(1+\gamma)}{\sqrt{k}} V_k \\ &+ \frac{(1+\gamma)(1+2\gamma) \left(\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho} \right)}{\gamma^3} A(n/k)(1+o_p(1)), \end{aligned} \quad (4.23)$$

com S_k e V_k assintoticamente normais padrão.

Demonstração. No Teorema 4.1 obtivemos que

$$\begin{aligned} 1 - B_1 - \frac{B_{(1)}}{A_{(1)}} &\stackrel{d}{=} \left(\frac{P_k^{(0)} - 1}{1+\gamma} - \frac{(1+\gamma)(R_k^{(0)} - \frac{\gamma}{1+\gamma})}{\gamma} \right) \\ &+ \frac{\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho}}{\gamma^2} A(n/k)(1+o_p(1)). \end{aligned}$$

Como

$$C_1 + \frac{C_{(1)}}{A_{(1)}} - \left(\frac{B_{(1)}}{A_{(1)}} \right)^2 \stackrel{d}{=} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2(1+2\gamma)} + o_p(1)$$

e $\frac{\widehat{\alpha}^{MP}(k) - \alpha}{\alpha} = \frac{1 - B_1 - \frac{B_{(1)}}{A_{(1)}}}{C_1 + \frac{C_{(1)}}{A_{(1)}} - \left(\frac{B_{(1)}}{A_{(1)}} \right)^2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\alpha}^{MP}(k) - \alpha}{\alpha} &\stackrel{d}{=} \frac{(1+\gamma)^2(1+2\gamma)}{\gamma^2} \left(\frac{P_k^{(0)} - 1}{1+\gamma} - \frac{(1+\gamma)(R_k^{(0)} - \frac{\gamma}{1+\gamma})}{\gamma} \right) \\ &+ \frac{(1+\gamma)^2(1+2\gamma) \left(\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho} \right)}{\gamma^4} A(n/k)(1+o_p(1)), \end{aligned}$$

e, com base na estrutura de covariância entre $P_k^{(0)}$ e $R_k^{(0)}$, apresentada na Proposição 4.1, obtemos (4.22).

Por último, dado que $\widehat{\gamma}_n^{MP}(k) = A_{(1)} + B_{(1)} \frac{\widehat{\alpha}^{MP}(k) - \alpha}{\alpha} (1 + o_p(1))$, podemos escrever que

$$\widehat{\gamma}_n^{MP}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \gamma(P_k^{(0)} - 1) + \frac{\gamma}{1+\gamma} \frac{\alpha^{MP}(k) - \alpha}{\alpha} (1 + o_p(1)),$$

obtendo-se (4.23). □

Nota 4.3. O comportamento assintótico do estimador $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$, em (1.7), foi obtido por Smith (1987) considerando o nível u fixo. O resultado obtido no seu Teorema 3.2 foi reescrito por Gomes (2002) no contexto de um nível $X_{n-k:n}$ aleatório, obtendo-se, sob a validade da condição de variação regular de segunda ordem em (1.2), a seguinte representação em distribuição

$$\hat{\gamma}_n^{ML}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{(1+\gamma)}{\sqrt{k}} M_k + \frac{(1+\gamma)(\gamma+\rho)}{\gamma(1-\rho)(1-\rho+\gamma)} \frac{A(n/k)}{A(n/k)} (1 + o_p(1)), \quad (4.24)$$

com M_k assintoticamente normal padrão.

Nota 4.4. Relativamente ao resultado de Smith expresso em (4.24), obtemos um viés assintótico diferente e comparando as representações em distribuição (4.21) e (4.23) observamos que, apesar de a estimação dos parâmetros de segunda ordem ser realizada de uma forma adequada, o viés obtido em (4.23) não é de ordem inferior a $A(n/k)$, como pretendido, e a variância assintótica aumenta ligeiramente.

5 Comportamento dos estimadores em amostras de dimensão finita - um estudo de simulação

Nesta secção começámos por implementar o algoritmo de estimação de máxima verosimilhança do modelo Generalizado de Pareto proposto por Grimshaw (1993) aplicado à amostra de excessos, V_i , de modo a obtermos as estimativas do estimador PORT-ML. Para obtermos as estimativas do estimador PORT-MP, desenvolvemos e implementámos uma versão modificada do algoritmo de Grimshaw, apresentada em anexo.

Devido ao elevado tempo de computação dos algoritmos de Grimshaw e de Grimshaw modificado, as simulações foram baseadas em 10 réplicas com 100 corridas cada para amostras pequenas, com $n = \{100, 200, 500, 1000\}$, e escolhemos o valor $j = 100$ para o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson modificado.

Na Figuras 1, 2 e 3 estão representadas as trajectórias dos valores médios, $E[.]$, e dos erros quadráticos médios, $EQM[.]$, dos estimadores em estudo, baseadas na primeira réplica, para um modelo *Burr*, $F(x) = 1 - (1 + x^{-\rho/\gamma})^{1/\rho}$, $x \geq 0$ com $\gamma + \rho < 0$, $\gamma + \rho = 0$ e $\gamma + \rho > 0$. Os valores escolhidos para (γ, ρ) foram $(0.1, -0.5)$, $(0.5, -0.5)$ e $(1.5, -0.5)$, respectivamente.

As simulações mostram que o estimador PORT-MP apresenta, regra geral e para modelos com valores de $\gamma + \rho \neq 0$, trajectórias estáveis e viés inferior ao do estimador PORT-ML, para todos os valores de k . O erro quadrático médio do estimador PORT-MP é, regra geral e para estes modelos, inferior ao erro quadrático médio do estimador PORT-ML para uma vasta gama de valores de k . Nos modelos com $\gamma + \rho = 0$ (Figura 2) o estimador PORT-ML é um estimador de viés reduzido de segunda ordem (veja-se (4.24)) e apresenta, como esperado, viés e erros quadráticos médios inferiores aos do estimador PORT-MP, para todos os valores de k .

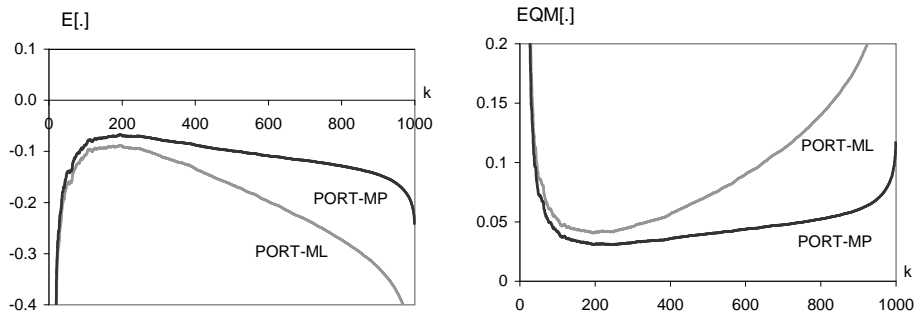


Figura 1: Valores médios e Erros quadráticos médios dos estimadores em estudo para amostras de dimensão $n = 1000$, de um modelo *Burr* com $\rho=-0.5$ e $\gamma = 0.1$.

As estimativas obtidas, $\hat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k)$ ($\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$ e $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$), com $k = 1, 2, \dots, n - 1$

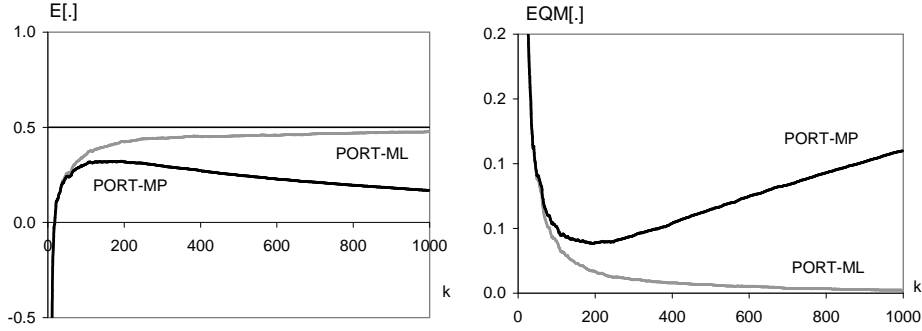


Figura 2: Valores médios e Erros quadráticos médios dos estimadores em estudo para amostras de dimensão $n = 1000$, de um modelo *Burr* com $\rho=-0.5$ e $\gamma = 0.5$.

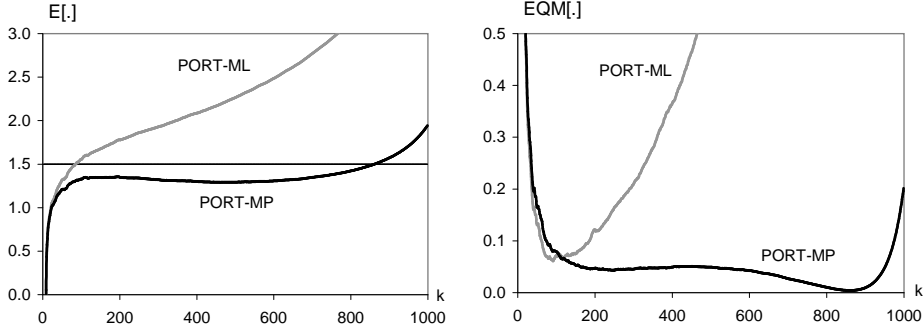


Figura 3: Valores médios e Erros quadráticos médios dos estimadores em estudo para amostras de dimensão $n = 1000$, de um modelo *Burr* com $\rho=-0.5$ e $\gamma = 1.5$.

e $i = 1, 2, \dots, 100$, serviram ainda de base para a determinação de,

$$k_{0s}^{M\bullet} := \arg \min_k \widehat{EQM}(\widehat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k)) = \arg \min_k \left(\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\widehat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k) - \gamma)^2 \right),$$

$$E_0^{M\bullet} := \widehat{E}[\widehat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k_{0s}^{M\bullet})] = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \widehat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k_{0s}^{M\bullet}),$$

$$EQM_0^{M\bullet} := \widehat{EQM}[\widehat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k_{0s}^{M\bullet})] = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\widehat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k_{0s}^{M\bullet}) - \gamma)^2,$$

e com base nos resultados obtidos nas 10 réplicas obtiveram-se os respectivos intervalos de confiança a 95%, apresentados na Tabela 1.

Na Tabela 2 apresentamos a eficiência relativa (REFF) dos estimadores em

Tabela 1: Fração óptima da amostra, Valores esperados e Erros quadráticos médios de $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$ e $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$ para um modelo *Burr* com $\gamma = \{0.1, 0.5, 1.5\}$ e $\rho = -0.5$.

n	100	200	500	1000
$(\gamma, \rho) = (0.1, -0.5)$				
k_{0s}^{ML}/n	0.4080 ± 0.0221	0.3185 ± 0.0247	0.2342 ± 0.0275	0.1980 ± 0.0129
k_{0s}^{MP}/n	0.5010 ± 0.0483	0.3600 ± 0.0223	0.2550 ± 0.0359	0.2354 ± 0.0130
E_0^{ML}	-0.2096 ± 0.0153	-0.1500 ± 0.0094	-0.0985 ± 0.0165	-0.0888 ± 0.0011
E_0^{MP}	-0.1061 ± 0.0125	-0.0857 ± 0.0046	-0.0669 ± 0.0112	-0.0690 ± 0.0009
EQM_0^{ML}	0.1279 ± 0.0119	0.0809 ± 0.0043	0.0483 ± 0.0052	0.0406 ± 0.0001
EQM_0^{MP}	0.0519 ± 0.0046	0.0415 ± 0.0018	0.0320 ± 0.0027	0.0307 ± 0.0003
$(\gamma, \rho) = (0.5, -0.5)$				
k_{0s}^{ML}/n	0.9720 ± 0.0184	0.9865 ± 0.0084	0.9866 ± 0.0172	0.9955 ± 0.0024
k_{0s}^{MP}/n	0.4650 ± 0.0411	0.3350 ± 0.0220	0.2306 ± 0.0255	0.1745 ± 0.0173
E_0^{ML}	0.4588 ± 0.0135	0.4704 ± 0.0065	0.4746 ± 0.0068	0.4763 ± 0.0042
E_0^{MP}	0.3025 ± 0.0189	0.3153 ± 0.0082	0.3261 ± 0.0112	0.3211 ± 0.0025
EQM_0^{ML}	0.0241 ± 0.0038	0.0112 ± 0.0010	0.0043 ± 0.0005	0.0025 ± 0.0002
EQM_0^{MP}	0.0568 ± 0.0072	0.0479 ± 0.0025	0.0397 ± 0.0033	0.0385 ± 0.0007
$(\gamma, \rho) = (1.5, -0.5)$				
k_{0s}^{ML}/n	0.2340 ± 0.0379	0.1785 ± 0.0243	0.1492 ± 0.0129	0.1052 ± 0.0123
k_{0s}^{MP}/n	0.7670 ± 0.0202	0.8190 ± 0.0095	0.8488 ± 0.0046	0.8592 ± 0.0035
E_0^{ML}	1.7315 ± 0.0619	1.6566 ± 0.0486	1.6375 ± 0.0327	1.5375 ± 0.0665
E_0^{MP}	1.4976 ± 0.0152	1.4960 ± 0.0063	1.4969 ± 0.0028	1.4972 ± 0.0028
EQM_0^{ML}	0.3448 ± 0.0330	0.1933 ± 0.0124	0.0968 ± 0.0074	0.0546 ± 0.0046
EQM_0^{MP}	0.0481 ± 0.0045	0.0246 ± 0.0026	0.0092 ± 0.0009	0.0051 ± 0.0006

estudo. A eficiência simulada de $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$, nos seus níveis óptimos é dada por,

$$\bar{R}_0 := \sqrt{\frac{EQM[\hat{\gamma}_n^{ML}(k_{0s}^{ML})]}{EQM[\hat{\gamma}_n^{MP}(k_{0s}^{MP})]}} =: \sqrt{\frac{EQM_0^{ML}}{EQM_0^{MP}}},$$

onde $\widehat{\gamma}_n^{ML}(k)$ e $\widehat{\gamma}_n^{MP}(k)$ são os estimadores dados em (1.7) e (1.12), respectivamente, k_{0s}^{ML} e k_{0s}^{MP} os níveis óptimos simulados dos estimadores PORT-ML e PORT-MP.

Os níveis óptimos para a estimação de γ através de $\widehat{\gamma}_n^{ML}$ e de $\widehat{\gamma}_n^{MP}$ denotam-se por k_0^{ML} e k_0^{MP} e obtêm-se através da minimização, em ordem a k , do erro quadrático médio assintótico dos respectivos estimadores. Assim,

$$k_0^{ML} := \left[\frac{(1-\rho)(1+\gamma-\rho)n^{-\rho}}{\sqrt{-2\rho(\gamma+\rho)}|\beta|} \right]^{\frac{2}{1-2\rho}} \quad (\gamma+\rho \neq 0),$$

$$k_0^{MP} := \left[\frac{\gamma^2 n^{-\rho}}{\sqrt{-2\rho(1+2\gamma)}|\beta| \left(\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho} \right)} \right]^{\frac{2}{1-2\rho}}.$$

O indicador de eficiência estimada de $\widehat{\gamma}_n^{MP}(k)$ relativamente a $\widehat{\gamma}_n^{ML}(k)$, calculado nos seus níveis óptimos estimados, é, para os modelos com $\gamma+\rho \neq 0$, dado por

$$\widehat{R}_0 := \sqrt{\frac{EQM[\widehat{\gamma}_n^{ML}(\widehat{k}_0^{ML})]}{EQM[\widehat{\gamma}_n^{MP}(\widehat{k}_0^{MP})]}},$$

onde $\widehat{k}_0^{ML} := k_0^{ML}(\widehat{\rho}, \widehat{\beta})$ e $\widehat{k}_0^{MP} := k_0^{MP}(\widehat{\rho}, \widehat{\beta})$ são os níveis óptimos estimados dos estimadores em estudo, $\widehat{\rho} := \widehat{\rho}(k_1; \tau)$ e $\widehat{\beta} := \widehat{\beta}(k_1; \widehat{\rho})$ os estimadores dos parâmetros de segunda ordem ρ e β dados em (3.3) e (3.6), respectivamente. O nível k_1 utilizado na estimação dos parâmetros de segunda ordem foi $k_1 = \lceil n^{0.995} \rceil$.

Nos modelos com $\gamma+\rho = 0$, o estimador $\widehat{\gamma}_n^{ML}$ é de viés reduzido de segunda ordem, pelo que não é possível, e num contexto de segunda ordem, determinar analiticamente o respectivo nível óptimo. A solução encontrada passa por considerar escolhas adaptativas do nível óptimo, à semelhança do que é feito em Gomes *et al.* (2006) e definir novos indicadores REFF. As escolhas adaptativas consideradas neste trabalho são: $k_{01}^{ML} := k_0^{MP}$ e $k_{02}^{ML} := n-1$, com os respectivos indicadores,

$$\hat{R}_1 := \sqrt{\frac{EQM[\hat{\gamma}_n^{ML}(\hat{k}_0^{MP})]}{EQM[\hat{\gamma}_n^{MP}(\hat{k}_0^{MP})]}} \text{ e } \hat{R}_2 := \sqrt{\frac{EQM[\hat{\gamma}_n^{ML}(n-1)]}{EQM[\hat{\gamma}_n^{MP}(\hat{k}_0^{MP})]}}.$$

Os valores dos indicadores inferiores a um encontram-se sublinhados.

Tabela 2: Indicadores de Eficiência Relativa para um modelo *Burr* com $\gamma = \{0.1, 0.5, 1.5\}$ e $\rho = -0.5$.

n	100	200	500	1000
$(\gamma, \rho) = (0.1, -0.5)$				
\bar{R}_0	1.5699 ± 0.0218	1.3959 ± 0.0131	1.2261 ± 0.0145	1.1502 ± 0.0040
\hat{R}_0	1.5521 ± 0.0277	1.3894 ± 0.0358	1.2231 ± 0.0215	1.1231 ± 0.0124
$(\gamma, \rho) = (0.5, -0.5)$				
\bar{R}_0	<u>0.6508</u> ± 0.0388	<u>0.4829</u> ± 0.0279	<u>0.3315</u> ± 0.0258	<u>0.2525</u> ± 0.0102
\hat{R}_1	<u>0.7472</u> ± 0.0385	<u>0.6468</u> ± 0.0258	<u>0.5520</u> ± 0.0202	<u>0.5189</u> ± 0.0101
\hat{R}_2	<u>0.6125</u> ± 0.5598	<u>0.4429</u> ± 0.4760	<u>0.3086</u> ± 0.3974	<u>0.2409</u> ± 0.3511
$(\gamma, \rho) = (1.5, -0.5)$				
\bar{R}_0	2.6843 ± 0.1344	2.8264 ± 0.1956	3.2506 ± 0.1316	3.2911 ± 0.2829
\hat{R}_0	3.9339 ± 0.8311	3.1137 ± 0.1895	2.1662 ± 0.1482	1.8628 ± 0.1097

6 Considerações finais

O estudo efectuado sobre a nova classe de estimadores de máxima verosimilhança do índice de cauda permite-nos tirar as seguintes conclusões:

- O estimador PORT-MP obtido através da acomodação do viés no modelo Pareto modificado é uma boa alternativa ao estimador PORT-ML, o estimador de máxima verosimilhança “clássico”, para uma grande variedade de modelos na região $\gamma + \rho \neq 0$;
- O estimador PORT-MP apresenta uma variância assintótica igual à do estimador PORT-ML e um viés assintótico diferente;

- Como seria de esperar, no nível óptimo, as estimativas de γ e do EQM dos estimadores PORT-MP e PORT-ML melhoram com o aumento da dimensão da amostra;
- O comportamento dos indicadores REFF depende, obviamente, dos parâmetros do modelo em análise. Além disso, os indicadores REFF apresentam para a generalidade dos modelos valores superiores a um. Para os modelos com $\gamma + \rho = 0$, a escolha adaptativa do “threshold”, $k_{02}^{ML} = n - 1$, forneceu melhores resultados do que os obtidos com base no nível adaptativo $k_{01}^{ML} = k_0^{MP}$.

7 Apêndice - Versão modificada do algoritmo de Grimshaw para determinação das estimativas de máxima verosimilhança num modelo Generalizado de Pareto modificado

A função de log-verosimilhança dos excessos associados à distribuição de Pareto modificada é, como vimos na secção 2, proporcional a

$$\begin{aligned} \ln L(\gamma, \alpha; \underline{V}) &= k \ln \alpha - k \ln \gamma - \beta \left(\frac{n}{k}\right)^\rho \sum_{i=1}^k \psi_i - \sum_{i=1}^k \ln(1 + \alpha V_i) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \ln(1 + \alpha V_i), \end{aligned}$$

onde $\alpha = \gamma/\delta$ e $\underline{V} = (V_i, 1 \leq i \leq k)$ é a amostra ordenada dos excessos associados ao modelo Generalizado de Pareto em (1.5), com γ substituído por γ_i em (1.11) e designado de modelo Pareto modificado. Pelo que, a função h utilizada no algoritmo de Grimshaw é, para esta versão modificada, dada por,

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} (1 - \theta V_i)^{-1} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} + \\ &\quad \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \ln(1 - \theta V_i) \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - \theta V_i)^{-1} \right), \quad (7.1) \end{aligned}$$

onde $\theta = -\alpha$.

A função apresentada satisfaz as seguintes propriedades, necessárias à determinação dos respectivos zeros:

- (i) $\lim_{\theta \rightarrow 1/V_k^-} h_1(\theta) = -\infty$;
- (ii) $h_1(\theta) < 0, \forall \theta < \theta_L := \frac{2(V_1 - \bar{V})}{(V_1)^2}$;
- (iii) $h_1'(\theta) := \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} (1 - \theta V_i)^{-2} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} (1 - \theta V_i)^{-1} + \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} - \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} (1 - \theta V_i)^{-1} \right) \times \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - \theta V_i)^{-1} \right) - \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \ln(1 - \theta V_i) \right] \times \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - \theta V_i)^{-1} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - \theta V_i)^{-2} \right] \right)$;
- (iv) $\lim_{\theta \rightarrow 0} h_1'(\theta) = 0$;
- (v) $\lim_{\theta \rightarrow 0} h_1''(\theta) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_i^2 e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} - 2\bar{V} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_i e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_i} \right)$.

Agradecimentos

A autora agradece à Professora Doutora Maria Ivette Gomes pelo incentivo e apoio prestados ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- [1] Araújo Santos, P., Fraga Alves, I. and Gomes, M. I. (2006). Peaks Over Random Threshold Methodology for Tail Index and High Quantile Estimation. *Revstat* **4** (3), 227-247.
- [2] Davison, A. (1984). Modeling excesses over high threshold with an application. In J. Tiago de Oliveira ed., *Statistical Extremes and Applications*, D. Reidel, 461-482.
- [3] Fraga Alves, M. I., Gomes, M. I. and de Haan, L. (2003). A new class of semi-parametric estimators of the second order parameter. *Portugaliae Mathematica* **60**:1, 193-213.

- [4] Geluk, J. and de Haan, L. (1987). *Regular Variation, Extensions and Tauberian Theorems*. CWI Tract 40, Center for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, Netherlands.
- [5] Gomes, M. I. (2002). *A note on the excesses over a high threshold*. Notas e Comunicações CEAUL 10/2002.
- [6] Gomes, M. I., de Haan, L. and Henriques Rodrigues, L. (2004). Tail index estimation for heavy-tailed models: accomodation of bias in the weighted log-excesses. *J. Royal Statist. Soc.*, em impressão.
- [7] Gomes, M. I. and Martins, M. J. (2002). “Asymptotically unbiased” estimators of the tail index based on external estimation of the second order parameter. *Extremes* **5**:1, 5-31.
- [8] Gomes, M. I. and Pestana, D. (2007). A simple second order reduced bias’ tail index estimator. To appear at *J. Amer. Statist. Assoc.*, Vol. **102**, No. 477, 280-292.
- [9] Gomes, M. I., Vandewalle, B., Rodrigues, L. and Viseu, C. (2006). A Heuristic Adaptive Choice of the Threshold for Bias-Corrected Hill Estimators. *J. Statist. Comp. and Simul.*, em impressão.
- [10] Grimshaw, S. D. (1993). Computing Maximum Likelihood Estimates for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics* **35**:2, 185-191.
- [11] Hall, P. (1982). On some simple estimates of an exponent of regular variation. *J. Royal Statist. Soc.* **B44**, 37-42.
- [12] Hall, P. and Welsh, A. H. (1985). Adaptive estimates of parameters of regular variation. *Ann. Statist.* **13**, 331-341.
- [13] Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.* **3**, 1163-1174.
- [14] Smith, R. L. (1987). Estimating tails of probability distributions. *The Annals of Statistics* **15**:3, 1174-1207.