Probabilidade e Convergência Estocástica

Rui Santos *rui.santos@ipleiria.pt*, Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, CEAUL — Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa

Trabalho financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do projeto PEst-OE/MAT/UI0006/2011.

Os resultados dos jogos de azar são caracterizados por terem duas facetas à primeira vista antagónicas. Por um lado, são descritos por uma desordem individual, isto é, pela impossibilidade de previsão de um resultado específico, consequência da incerteza associada a cada resultado de um jogo de azar (caso contrário não seria realmente um jogo de azar). Por outro lado, são também descritos pela sua ordem coletiva, ou seja, pela regularidade existente quando visualizamos um conjunto (com um número razoável) de resultados. Os fenómenos caracterizados por esta dupla faceta, denominados fenómenos aleatórios, são o alvo de análise da Teoria da Probabilidade. Todavia, os fenómenos aleatórios não se restringem aos resultados de jogos de azar.

Definição de probabilidade

A definição de probabilidade utilizada na resolução dos primeiros problemas de Cálculo das Probabilidades é baseada na equiprobabilidade, definição que se tornou célebre principalmente após a publicação em 1812 da obra prima de Pierre Simon, Marquis de Laplace (1749−1827), na qual, sob a hipótese de os resultados serem igualmente prováveis e em número finito, teremos

Laplace

$$\mathbb{P}\,(\text{Acontecimento } \mathbf{A}) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis ao acontecimento } \mathbf{A}}{\text{Número de resultados possíveis}},$$

Leibniz

actualmente denominada por definição clássica ou laplaceana. A origem desta definição é identificada com um *memorandum* de Gottfried von Leibniz (1646−1716) que data de 1678. Para o caso contínuo, na resolução do famoso problema da *Agulha de Buffon* proposto por Georges-Louis de Buffon (1707−1788) em 1733 (publicado em 1777), surge uma extensão da definição clássica, denominada definição geométrica de probabilidade, onde

$$\mathbb{P}\,(\text{Região } \mathbf{R}) = \frac{\text{Medida da região } \mathbf{R}}{\text{Medida da região possível}}.$$

A aplicação destas definições era muitas vezes justificado com recurso ao polémico *princípio da razão insuficiente* de Jacob Bernoulli e Laplace (também denominado por *princípio da indiferença*), segundo o qual podemos considerar que dois resultados são equiprováveis se não houver nenhuma razão para suspeitar que há um resultado mais provável que outro.

Com a crescente importância dos fenómenos aleatórios na Física, David Hilbert (1862−1943), na sua famosa alocução no *Congresso Internacional de Matemática de Paris* em 1900, inclui a fundamentação da Probabilidade num dos 23 desafios que propõe para investigação em Matemática durante o século XX.

Hilbert

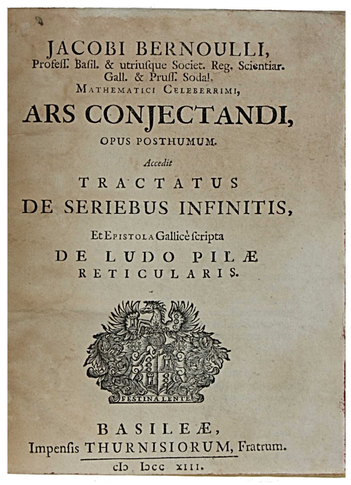
Kolmogoroff

Este problema só ficou resolvido em 1933 com a axiomatização da probabilidade por Andrey Kolmogoroff (1903−1987). Esta axiomática, baseada em conceitos da Teoria da Medida, fornece toda a estrutura matemática para lidarmos com probabilidades.

Nesta axiomática a probabilidade é vista como um conceito matemático, uma medida, onde qualquer função que satisfaça os axiomas é uma medida de probabilidade, permitindo manipular probabilidades, mas não explica como se determinam ou se interpretam as probabilidades através de uma experiência real. Para tal, existem outras propostas de fundamentação da probabilidade que pretendem explicar a aplicabilidade deste conceito e a sua ligação à Estatística.

Convergências estocásticas

Em 1713 é publicada a obra póstuma e inacabada *Ars conjectandi* (Arte de conjeturar) de Jacob Bernoulli (1655−1705), pelo seu sobrinho Nicolaus Bernoulli (1687−1759). Nesta obra, além de uma versão anotada do livro de Huygens e da demonstração do binómio de Newton e sua aplicação no Cálculo de Probabilidades, surge o primeiro teorema limite. Jacob Bernoulli, que considerava este resultado importante, chamou-lhe *Teorema de Ouro*, sendo depois designado, em 1837, por *Lei dos Grandes Números* por Siméon Denis Poisson (1781−1840).



Este resultado estabelece que, se repetirmos um grande número de vezes uma dada experiência aleatória, a proporção de vezes $\widehat{p_{\mathbf{A}}}$ que ocorre um dado acontecimento $\mathbf{A}$ irá aproximar-se, cada vez mais, da probabilidade $p_{\mathbf{A}}$ desse acontecimento, isto é

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\ |\widehat{p_{\mathbf{A}}} - p_{\mathbf{A}}| < \varepsilon\right] = 1.$$

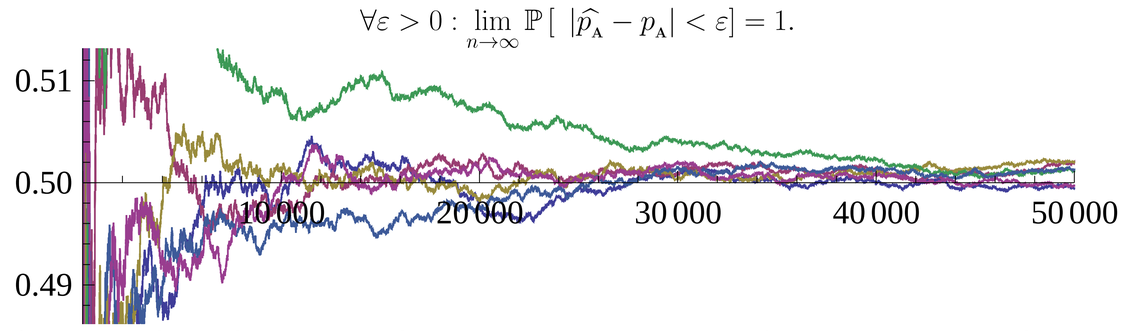
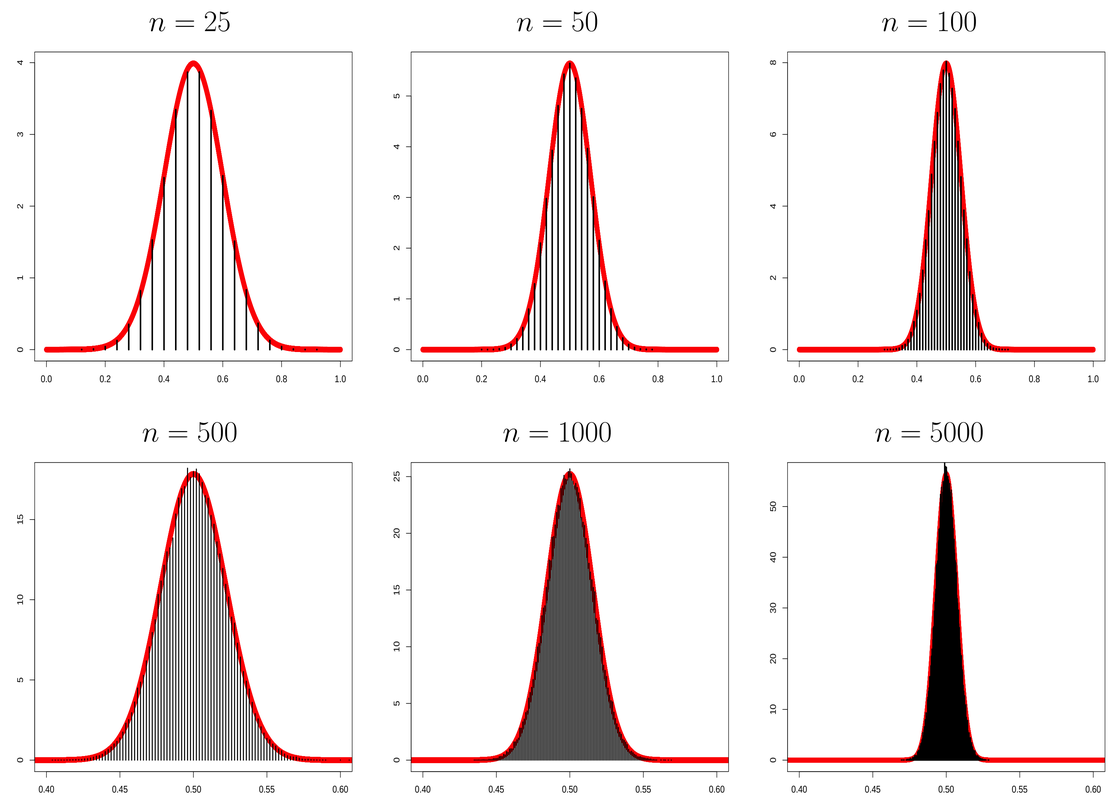


Figura: Evolução da proporção de sucessos em seis sequências de 50000 provas, inicialmente com alguma variabilidade, mas depois convergindo todas para o mesmo limite (para a probabilidade)

Em 1738 Abraham de Moivre (1667−1754) apresenta a primeira versão do Teorema Limite Central, restrito a provas de Bernoulli (denominado Teorema de De Moivre-Laplace), no qual as probabilidades associadas à proporção $\widehat{p_{\mathbf{A}}}$ podem ser aproximadas utilizando a Lei de Gauss (também denominada por distribuição normal). Este teorema permite avaliar a velocidade de convergência da Lei dos Grandes Números, mostrando como é possível usá-la como aproximação em situações pré-assintóticas, no sentido em que podemos quantificar essa aproximação.



Quadro: Distribuição da proporção empírica em n observações

Estes teoremas permitiram fundamentar a ligação entre a Teoria da Probabilidade e a realidade (libertação da sua dependência dos jogos de azar), sendo ainda hoje resultados capitais da Teoria da Probabilidade e da sua ligação à Estatística.